PROJEKTOVÁNÍ EL. DISTRIBUČNÍCH SÍTÍ

Modelování preferencí mezi kriterii (téma 8.)

! STUDIJNÍ CÍLE

- Porozumět postupům získání vah kriterií
- Pochopit základní odlišnosti v ordinálních informacích o kriteriích a vahách kriterií
- Umět provést dělení úloh získávání vah kriterií

KLÍČOVÁ SLOVA

Vícekriteriální rozhodovací analýza (multikriteriální analýza), kriterium, hodnocení kriteria, váhy kriterií, ordinální informace, Fullerův trojúhelník, Saatyho metoda, názory odborníků.

ČAS POTŘEBNÝ KE STUDIU

120 minut

TEXT K PROSTUDOVÁNÍ

1. Modelování preferencí mezi kritérii

Vícekriteriální rozhodování, je modelování rozhodovacích situací, ve kterých máme definovánu množinu variant a soubor kritérií, podle nichž budeme varianty hodnotit. V následujícím uvedu dva postupy, jak modelovat preference mezi kritérii a s tím požadované typy informace od uživatele: ordinální informace o kritériích a kardinální informace o kritériích ve formě vah kritérií.

1.1. Ordinální informace

Ordinální informací o kritériích se rozumí jejich uspořádání od nejvíce důležitého po nejméně důležité. Některé metody s ordinální informací připouštějí i kvaziuspořádání, tj. připouštějí i existenci několika stejně hodnocených kritérií.

1.2. Váhy

Většina metod vícekriteriálního rozhodování vyžaduje informaci o relativní důležitosti jednotlivých kritérií, kterou lze vyjádřit pomocí vektoru vah kritérií:

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_k), \qquad \sum_{i=1}^{k} v_i = 1, \qquad v_i \geq 0. \qquad \textbf{(32)}$$

1.3. Metody určování vah kritérií

Čím je důležitost kritéria větší, tím je větší i jeho váha. Získat od uživatele přímo hodnoty vah je velmi obtížné, avšak existují metody, které na základě jednodušších subjektivních informací od uživatele konstruují odhady vah.

1.3.1. Metoda pořadí

Tato metoda vyžaduje pouze ordinální informaci, stanovení pořadí kritérií podle důležitosti. Uspořádaným kritériím jsou přiřazena čísla (body) *k,…,1*. Nejdůležitějšímu kritériu je přiřazeno číslo *k* (počet kritérií), druhému nejdůležitějšímu *k-1*, až nejméně důležitému kritériu číslo *1*. Obecně je *i*-tému kritériu přiřazeno číslo b_i. Váha *i*-tého kritéria se pak vypočte dle vzorce

$$v_i = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^{k} b_i} \qquad i = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(33)}$$

Součet čísel b_i ve jmenovateli je součtem prvních *k* přirozených čísel

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \textbf{(34)}$$

1.3.2. Bodovací metoda

Bodovací metoda předpokládá, že je uživatel schopen kvantitativně ohodnotit důležitost kritérií. Pro zvolenou bodovací stupnici musí uživatel ohodnotit *i*-té kritérium hodnotou b_i ležící v dané stupnici (např. $b_i \in \langle 0,100 \rangle$). Čím je kritérium

důležitější, tím je bodové ohodnocení vyšší. Uživatel nemusí volit pouze celá čísla z dané stupnice a může přiřadit stejnou hodnotu i více kritériím. Bodovací metoda sice vyžaduje od uživatele kvantitativní ohodnocení kritérií, ale umožňuje diferencovanější vyjádření subjektivních preferencí než metoda pořadí. Výpočet vah se provádí podle vztahu (33) jako u metody pořadí.

1.3.3. Metoda párového srovnání kritérií

Zde se používá pro odhad vah pouze informace, které ze dvou kritérií je při párovém srovnání důležitější. Uživatel postupně srovnává každá dvě kritéria mezi sebou, takže počet srovnání je

$$N = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \qquad \textbf{(35)}$$

Srovnání se mohou provádět v tzv. **Fullerově trojúhelníku**. Kritéria se pevně očíslují pořadovými čísly *1, 2,…, k*. Uživateli se předloží trojúhelníkové schéma, jehož dvojřádky tvoří dvojice pořadových čísel, uspořádaných tak, že se každá dvojice kritérií vyskytne právě jedenkrát. Uživatel je požádán, aby zakroužkováním označil u každé dvojice to kritérium, které považuje za duležitější. Počet zakroužkování *i*-tého kritéria označíme n_i. Váha *i*-tého kritéria se pak vypočte dle následujícího vzorce

$$v_i = \frac{n_i}{N} \qquad i = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(36)}$$

Fullerův trojúhelník má následující schéma:

```
1       1       1       .       1
2       3       4       .       k
---------------------------- ----------
        2       2       .       2
        3       4       .       k
        ----------------------------
                .       .       k
                ---------------------
                        k-2     k-2
                        k-1     k
                        ------------
                                k-1
                                k
```

Výhodou této metody je jednoduchost vyžadované informace od uživatele. Po úpravách je možno připustit i situace, že některá kritéria jsou stejně důležitá, nebo nesrovnatelná. V případě, že chceme vyloučit nulové váhy, zvyšuje s v případě potřeby každý počet zakroužkovaných čísel o jedničku a musí se odpovídajícím způsobem zvýšit i hodnota jmenovatele ve vzorci (36).

1.3.4. Příklad určení vah kritérií metodou Fullerova trojúhelníku

Dejme tomu, že si chceme z několika variant zvolit své budoucí zaměstnání a rozhodli jsme se posuzovat nabídky podle následujících kritérií:

Kritérium f_1 - vzdálenost zaměstnání od místa bydliště
Kritérium f_2 - výše platu
Kritérium f_3 - možnost profesního růstu
Kritérium f_4 - prestiž firmy

Pokud budeme řešit daný problém některou z metod multikriteriální analýzy, která bude vyžadovat znalost vah kritérií, můžeme použít metodu Fullerova trojúhelníku, jak je uvedeno níže:

f_1 f_1 f_1

f_2 f_2 f_3

---

f_2 f_2

f_3 f_4

---

f_3

f_4

Kritérium f_1 bylo preferováno (zakroužkováno) jednou (n_1=1 bod) , kritérium f_2 dvakrát jako jednoznačně důležitější (2 body) a jednou jako stejeně důležité s kritériem f_3 (0,5 bodu), takže n_2=2,5 bodu. Kritérium f_3 má ze stejného důvodu také 0,5 bodu a navíc ještě 1 bod za srovnání s kritériem f_1, proto n_3=1,5 bodu. Kritérium f_4 má n_4=1 bod. Dle vztahu (36) pak určíme váhy jednotlivých kritérií, tedy důležitost jakou jim přisuzujeme:

Kritérium	v_i
Vzdálenost zaměstnání od místa bydliště (f_1)	0,166
Výše platu (f_2)	0,416
Možnost profesního růstu (f_3)	0,250
Prestiž firmy (f_4)	0,166
Suma vah všech kritérií	1,000

Tabulka 1: Váhy kritérií vypočtené metodou Fullerova trojúhelníku

1.3.5. Metoda kvantitativního párového srovnání kritérií

Při vytváření matice párových srovnání $S=s_{ij}$, kdy $i,j=1,2,\ldots,k$, se často používá stupnice $1,2,\ldots,9$ a reciproké hodnoty. Prvky matice s_{ij} jsou interpretovány jako odhady podílu vah *i*-tého a *j*-tého kritéria

$$s_{ij} \approx \frac{v_i}{v_j} \qquad i = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(37)}$$

Této matici se říká Saatyho matice.

Důvody pro zvolený rozsah stupnice jsou okolnosti, že všechny prvky by měly být stejného řádu; existuje i odpovídající vhodná verbální stupnice:

1 - rovnocenná kritéria *i* a *j*
3 - slabě preferované kritérium *i* před *j*
5 - silně preferované kritérium *i* před *j*
7 - velmi silně preferované kritérium *i* před *j*
9 - absolutně preferované kritérium *i* před *j*

Hodnoty 2, 4, 6, 8 vyjadřují mezistupně.

Předpokládejme, že máme definovány prvky (kritéria) $f_1,f_2,\ldots, f_k$. Vzájemným porovnáním těchto prvků sestavil uživatel matici párových porovnání $S=s_{ij}$, při $i,j=1,2,\ldots,k$. Otázkou však nyní zůstává, jakým způsobem budou z matice párových porovnání odvozeny váhy (preferenční indexy) těchto prvků (kritérií). Vektor jejich hodnot označíme $v=(v_1,v_2,\ldots ,v_k)$.

Matice párových porovnání *S* obsahuje kvantifikované informace od uživatele o vztahu jednotlivých dvojic prvků. Prvek s_{ij} této matice můžeme interpretovat v podstatě jako poměr
důležitosti prvků f_i a f_j. Z tohoto určení tedy vyplývají vlastnosti prvků této matice:

- prvky na diagonále $s_{ii}=1$ při $i=1,2,\ldots,k$
- matice *S* je reciproční matice - platí tedy: $s_{ij}=1/s_{ji}$

Matici S můžeme tedy zapsat následovně

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & \ldots & f_k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & s_{12} & \ldots & s_{1k} \\ 1/s_{12} & 1 & \ldots & s_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1/s_{1k} & 1/s_{2k} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \textbf{(38)}$$

1.3.6. Určení vah kritérií z geometrického průměru řádků

Jednoduchý a nenáročný způsob určení vah krítérií ze zadané matice *S* spočívá ve výpočtu geometrického průměru každého řádku této matice

$$g_i = \sqrt[k]{\prod_{j=1}^{k} s_{ij}} \qquad i = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(39)}$$

a následné normalizace určených vah, tak aby byla splněna podmínka

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = 1, \qquad v_i \geq 0. \qquad \textbf{(40)}$$

Normalizovat můžeme například jednoduchým vztahem

$$v_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{k} g_i} \qquad i, j = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(41)}$$

1.3.7. Příklad určení vah kritérií prostřednictvím geometrického průměru řádků

Mějme zadánu matici párových provnání

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \textbf{(42)}$$

Vypočteme geometrické průměry všech řádků

$$g_1 = \sqrt[4]{1.4.6.7} = 3{,}6$$
$$g_2 = \sqrt[4]{1/4.1.3.4} = 1{,}31$$
$$g_3 = \sqrt[4]{1/6.1/3.1.2} = 0{,}5773$$
$$g_4 = \sqrt[4]{1/7.1/4.1/2.1} = 0{,}3655$$

Po normalizaci na základě vztahu (41) získáme

Kritérium	v_i
kritérium f_1	0,615
kritérium f_2	0,224
kritérium f_3	0,099
kritérium f_4	0,062
Suma vah všech kritérií	1,000

Tabulka 2: Váhy kritérií – geometrický průměr řádků

1.3.8. Podrobný popis Saatyho metody určování vah kritérií

Saatyho postup k odvození prvků vektoru *v* (váhy, preferenční indexy prvků) spočívá ve výpočtu vlastního vektoru, který přísluší největšímu vlastnímu číslu matice *S*.

Předpokládejme nejprve situaci, že se uživateli podaří zadat matici *S* ideálním způsobem tak, že pro všechny trojice indexů *i, j, q* této matice bude platit

$$s_{ij} \cdot s_{jq} = s_{iq} \qquad \textbf{(43)}$$

Pokud matice *S* bude splňovat podmínku (43), potom budeme říkat, že je to plně konzistentní matice. Vzhledem k této podmínce a vzhledem k tomu, že hledané hodnoty v_i pro $i=1,2,\ldots,k$, představují kvantifikaci důležitosti prvků hierarchie f_i a prvky matice párových porovnání jsou poměry těchto důležitostí, je možné psát

$$s_{ji} = \frac{v_j}{v_i} \qquad i, j = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(44)}$$

a tedy

$$s_{ij} \cdot s_{ji} = 1 \qquad i, j = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(45)}$$

Sloučením (44) a (45) dostáváme

$$s_{ij} \frac{v_j}{v_i} = 1 \qquad i, j = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(46)}$$

a odtud

$$\sum_{j=1}^{k} s_{ij} \frac{v_j}{v_i} = k \qquad i = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(47)}$$

resp.

$$\sum_{j=1}^{k} s_{ij} v_j = k \cdot v_i \qquad i = 1,2,\ldots,k \qquad \textbf{(48)}$$

Vztah (48) odpovídá maticovému zápisu

$$S \cdot v = k \cdot v \qquad \textbf{(49)}$$

Z předcházejícího vztahu vyplývá, že vektor *v* je vlastním vektorem matice *S* příslušející vlastnímu číslu *k*. Pro jeho kvantifikaci lze potom použít některou z metod pro výpočet vlastního vektoru matice.

Uvažujme nyní reálnou situaci, že matice *S* zadaná uživatelem není plně konzistentní. Vzhledem ke způsobu zadávání prvků matice *S* (může být verbální i numerický), nelze ani předpokládat, že by se uživateli podařilo zadat plně konzistentní matici. V postupu pro výpočet vektoru *v* vychází Saaty z následujících předpokladů, vyplývajících z maticové teorie.

Pro pozitivní reciproční matici S_{kxk} existuje *k*-vektorů w^i a skalárních hodnot l_i, při $i=1,2,\ldots,k$, pro které platí

$$S \cdot w^i = l_i \cdot w^i \qquad \textbf{(50)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = k \qquad \textbf{(51)}$$

(w^i a l_i jsou vlastní vektory resp. vlastní čísla matice *S*).

Pro plně konzistentní matici *S* platí, že jedním z vlastních čísel je řád matice *k* a ostatní vlastní čísla jsou rovna nule. Řád matice *S* je tedy největším vlastním číslem této matice.

Nepatrné změny v koeficientech matice *S* vedou k nepatrným změnám v hodnotách vlastních čísel a vektorů této matice.

Pokud tedy matice párových porovnání není plně konzistentní, potom lze za předpokladu, že „míra nekonzistence“ není příliš velká, konstatovat, že pro největší vlastní číslo této matice platí $l_{max}>k$, a že ostatní vlastní čísla jsou blízká nule (některá z nich jsou komplexní čísla). Saaty potom navrhuje řešit pro odvození intenzit preferencí soustavu

$$S \cdot v = l_{\max} \cdot v \qquad \textbf{(52)}$$

$$\sum_{i=1}^{k} v_i = \alpha \qquad \textbf{(53)}$$

kde v_i je váha *i*-tého kritéria (prvku).

Jedním z předpokladů použití výše uvedeného postupu je dostatečná konzistence matice párových porovnání. Měření konzistence vychází z toho, že čím větší jsou nesrovnalosti v zadání matice párových porovnání, tím větší je rozdíl $l_{max}-k$. Tento rozdíl nelze samozřejmě uvažovat absolutně, ale pouze ve vztahu k řádu dané matice. Saaty definuje index konzistence

$$C.I. = (l_{\max} - k)/(k-1) \qquad \textbf{(54)}$$

Pokud je hodnota tohoto indexu $C.I.<0,1$, potom lze považovat matici párových porovnání za dostatečně konzistentní. Jiným způsobem ověření konzistence je tzv. poměr konzistence

$$C.R. = C.I./R.I. \qquad \textbf{(55)}$$

kde R.I. je průměrný index konzistence pro 500 náhodně generovaných recipročních matic při použití Saatyho škály 1-9. Přehled v tabulce 3 přináší hodnoty průměrného indexu R.I. pro různé řády matice *S*:

k	3	4	5	6	7	8	10	12	15
R.I.	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,49	1,53	1,59

Tabulka 3: Hodnoty průměrného indexu R.I.

Za dostatečně konzistentní matici při hodnocení poměru konzistence je považována ta, pro kterou platí *C.R. < 0,1*.

Saatyho postup pro odvození vah kritérií z matice párových porovnání spočívá tedy v řešení soustavy rovnic (52-53), tzn. ve výpočtu vlastního vektoru matice *S*, který přísluší největšímu vlastnímu číslu této matice l_{max}. Pro tento výpočet existuje několik numerických metod, jedna z nich je založena na platnosti vztahu

$$\lim_{r\to\infty}\frac{S^r \cdot e}{e^T \cdot S^r \cdot e} = c \cdot v \qquad \textbf{(56)}$$

kde S_{kxk} je pozitivní reciproční matice, *v* je její vlastní vektor příslušející největšímu vlastnímu číslu, *c* je konstanta a $e^T=(1,1,\ldots,1)$. Vztah (56) říká, že vektor tvořený součtem prvků řádků *r*-té mocniny matice *S* dělený součtem všech prvků této matice se blíží pro dostatečně velké *r* vlastnímu vektoru matice *S* příslušející největšímu vlastnímu číslu. Postup výpočtu je tedy poměrně jednoduchý. V jednotlivých iteracích se propočte vztah $(S^r \,.\, e)/(e^T.\, S^r \,.\, e)$ pro $r=1,2,4,8,\ldots$ a sleduje se, jak se vypočtené vektory liší ve dvou po sobě jdoucích iteracích.
Zkušenosti ukazují, že dostatečnou přesnost dosáhneme již pro *r=16*.

1.3.9. Příklad určení vah kritérií Saatyho metodou

Při určování vah kritérií touto metodou sestavíme nejprve tzv. Saatyho matici tak, že porovnáme vždy dva prvky (dvě kritéria) mezi sebou a ohodnotíme poměr jejich důležitostí (významů) zlomkem, kde čitatel a jmenovatel jsou celá čísla v rozsahu 1-9. Získáme například takovouto matici:

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \textbf{(57)}$$

Při jejím vyplňování stačí porovnávat a dosazovat pouze prvky nad hlavní diagonálou, která je pochopitelně tvořena samými jedničkami, což vyplývá z vlastností Saatyho reciproční matice.

Pro výpočet váhového vektoru použijeme vztah (56) následujícím způsobem

$$\lim_{r\to\infty} \frac{S^r \cdot e}{e^T \cdot S^r \cdot e} = c \cdot v \qquad \textbf{(58)}$$

jako dostatečný iterační krok si zvolíme *r=16*, tedy šestnáctou mocninu Saatyho matice a výpočet si rozdělíme do jednotlivých kroků. Nejprve vypočteme čitatele daného zlomku:

$$S^r \cdot e = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}201.10^{10} \\ 1{,}161.10^{10} \\ 5{,}0474.10^{9} \\ 3{,}2243.10^{9} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(59)}$$

a nyní jmenovatele, což je skalární hodnota, jíž podělíme vektor vypočtený výše a získáme tak výsledný vektor vah kritérií:

$$e^T \cdot S^r \cdot e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}^{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5{,}191.10^{10} \qquad \textbf{(60)}$$

Kritérium	v_i
kritérium f_1	0,617
kritérium f_2	0,224
kritérium f_3	0,097
kritérium f_4	0,062
Suma vah všech kritérií	1,000

Tabulka 4: Váhy kritérií vypočtené Saatyho metodou

Získané hodnoty a pracnost výpočtu můžeme srovnat s příkladem v odstavci 1.3.7., kde byla tatáž vstupní matice počítána pomocí geometrického průměru řádků.

2. Stanovení vah kriterií z názorových hladin odborníků.

Po experimentálních zkušenostech na jednodušších příkladech stanovování vah kriterií můžeme tvrdit, že zejména poslední tři uvedené metody stanovení vah kriterií jsou pro svou značnou pracnost nevhodné a nepřinášejí kvalitativní skok ve vypočtených hodnotách vah. Musíme vzít v úvahu, že vstupní data pro výpočet jsou zatížena značnou subjektivitou. Metoda získání vah kriterií uvedená v dalším se jeví pro praktické výpočty objektivnější.

Pokusme se stanovit váhy kriterií na základě různých názorů mnoha odborníků, kteří se k dané problematice vyjádří. Získáme tedy rozsáhlé soubory dat, které vyjadřují různým způsobem hledané hodnoty vah. Zde okamžitě vznikají otázky, jak nejlépe využít takto získaných dat k vytvoření nejlepšího odhadu žádaného parametru - váhy kriteria. Nabízí se zajisté odpověď, že nejlepší odhad je ten, který bude nejblíže skutečné hodnotě odhadovaného parametru. Avšak musíme si uvědomit, že každý odhad je funkcí výběrových hodnot a že tedy na něj musíme pohlížet jako na pozorovanou hodnotu určité náhodné veličiny . Nemáme tudíž možnost předpovědět onu hodnotu, které nabude odhad v daném jednotlivém případě, takže přiléhavost odhadu k odhadovanému parametru nemůže být posuzována z jednotlivých jeho hodnot, nýbrž výhradně z rozdělení hodnot, jichž nabude v dlouhé řadě výběrů, t. j.

z výběrového rozdělení. Je-li většina hodnot v takovém rozdělení soustředěna v nějakém malém okolí skutečné hodnoty parametru, je velká pravděpodobnost, že odhad se bude jen málo lišit od skutečné hodnoty. Z tohoto hlediska bude tedy odhad „lepší“ tou měrou, jakou jeho výběrové rozdělení prokáže větší soustředění kolem skutečné hodnoty, přičemž tedy výše položená otázka přejde do tvaru: Jak bychom využili svých dat, abychom obdrželi odhady s maximálním soustředěním kolem skutečné hodnoty parametru.

Soustředění či prostě rozptýlení hodnot může být měřeno různými způsoby.

K zachycení míry seskupení dat vypočítáváme tzv. charakteristiky rozptýlení. Mezi ně patří např. rozpětí. Jinou takovou charakteristikou je průměrná odchylka definována jako průměr absolutních hodnot odchylek od pozorování od mediánu.

Tedy průměrná odchylka

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \tilde{x} \right|}{n} \qquad (61)$$

Takto definovaná průměrná odchylka je teoreticky i z hlediska početního vhodnější než podobná charakteristika, v níž místo odchylek od mediánu se sčítají odchylky od průměru.

Výpočet průměrné odchylky se provede nejjednodušeji tak, že pozorovaný soubor seřadíme podle velikosti tak, že x_1 je nejmenší a x_n největší hodnota.

Potom platí

$$\begin{aligned} x_n - x_1 &= \left| x_n - \tilde{x} \right| + \left| x_1 - \tilde{x} \right| \\ x_{n-1} - x_2 &= \left| x_{n-1} - \tilde{x} \right| + \left| x_2 - \tilde{x} \right| \end{aligned} \qquad (62)$$

a tak dále. Bude-li n sudé, bude na levé straně posledního řádku rozdíl obou prostředních hodnot, zatímco při lichém n tam bude rozdíl obou hodnot sousedících s mediánem. V obou případech bude součet pravých stran součtem absolutních hodnot odchylek a mediánu, protože chybějící člen při lichém n je $(\tilde{x} - \tilde{x}) = 0$. Můžeme tedy napsat

$$\mathrm{d_m} = \frac{1}{\mathrm{n}}\left[\sum(\text{horní poloviny pozorování}) - \sum(\text{dolní poloviny})\right]$$

přičemž při lichém n se medián vynechá.

Nejdůležitější charakteristikou rozptýlení je tzv. rozptyl nebo jeho kladná odmocnina nazývaná směrodatnou odchylkou. Rozptyl je součet čtverců odchylek od průměru dělený číslem o jednu menší než je počet pozorování. Tedy

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_1 - \bar{x}\right)^2}{n-1} \qquad (63)$$

Směrodatná odchylka je ve stejných jednotkách jako pozorovaná data a je vhodnější k popisu rozptýlení dat v daném souboru než rozptyl. Rozptyl má však větší význam z hlediska statistické indukce a v mnohem větší míře se používá jako míry rozptýlení v náhodných výběrech. Ukažme ještě, že součet čtverců odchylek je minimální pro odchylky od aritmetického průměru. Označme součet čtverců odchylek od nějaké charakteristiky polohy x_m jako kvadratickou formu

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_m\right)^2 \qquad (64)$$

a počítáme min. Q vzhledem k x_m! Tedy

$$\frac{\partial Q}{\partial x_m} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_m\right) = 0 \qquad (65)$$

čili

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = nx_m$$

takže $x_m = \bar{x}$ minimalizuje formu Q. (66)

Rozptyl nebo směrodatná odchylka se lépe počítají, když se výrazy, které je definují, předem upraví.

Tedy pro rozptyl

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{67}$$

platí dále

$$\begin{aligned}(n-1)\sigma^2 &= \sum (x_i - \bar{x})^2 \\ (n-1)\sigma^2 &= \sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ (n-1)\sigma^2 &= \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\bar{x}^2\end{aligned} \tag{68}$$

Protože však $\sum x_i = n\bar{x}$,

$$\begin{aligned}(n-1)\sigma^2 &= \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \\ (n-1)\sigma^2 &= \sum x_i^2 - n\bar{x}^2\end{aligned} \tag{69}$$

a odtud

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} \tag{70}$$

K výpočtu tohoto výrazu potřebujeme znát počet pozorování, průměr a součet čtverců jednotlivých hodnot (nikoli již odchylek od průměru). Někdy je však výhodné odstranit z výrazu průměr $\bar{x}$ a nahradit jej součtem podle vztahu

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right] \tag{71}$$

Upravíme-li dále, dostáváme:

$$\sigma^2 = \frac{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)} \tag{72}$$

Zde potřebujeme k výpočtu hodnoty n, $\sum x_{1,} \sum x_i^2$.

Každé takovéto jednotlivé charakteristice vypočtené z náhodného výběru za účelem odhadnutí velikosti neznámého parametru říkáme bodový odhad.

? KONTROLNÍ OTÁZKY TEORETICKÉ

- **1.** (2 body) Vysvětlete postup získání vah kriterií pomocí Fullerova trojúhelníku

- **2.** (3 body) Proveďte dělení úloh získávání vah kriterií podle výpočetního principu, který metody využívají

SHRNUTÍ

Nové poznatky a pojmy :

- Kriterium
- hodnocení kriteria
- vektor vah kriterií
- ordinální informace
- Fullerův trojúhelník
- Saatyho metoda
- Stanovení vah z názorových hladin odborníků.

KLÍČ K OTÁZKÁM

Teoretické

1. Kritéria se pevně očíslují pořadovými čísly *1, 2,…, k*. Uživateli se předloží trojúhelníkové schéma, jehož dvojřádky tvoří dvojice pořadových čísel, uspořádaných tak, že se každá dvojice kritérií vyskytne právě jedenkrát. Uživatel je požádán, aby zakroužkováním označil u každé dvojice to kritérium, které považuje za duležitější. Počet zakroužkování *i*-tého kritéria označíme n_i. Váha *i*-tého kritéria se pak vypočte dle následujícího vzorce

$$v_i = \frac{n_i}{N} \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

Fullerův trojúhelník má následující schéma:

```
1       1       1       .       1
2       3       4       .       k
-------------------------------------
        2       2       .       2
        3       4       .       k
        ----------------------------
                .       .       k
                ---------------------
                        k-2     k-2
                        k-1     k
                        ------------
                                k-1
                                k
```

Výhodou této metody je jednoduchost vyžadované informace od uživatele. Po úpravách je možno připustit i situace, že některá kritéria jsou stejně důležitá, nebo nesrovnatelná. V případě, že chceme vyloučit nulové váhy, zvyšuje s v případě

potřeby každý počet zakroužkovaných čísel o jedničku a musí se odpovídajícím způsobem zvýšit i hodnota jmenovatele ve vzorci (36).

2. Tyto metody je možné rozdělit podle výpočetního principu, který metody využívají, například:

- Metoda pořadí
- Bodovací metoda
- Metoda párového srovnání kriterií
- Určení vah z geometrického průměru řádků
- Saatyho metoda
- Stanovení vah z názorových hladin odborníků.

AUTOKONTROLA

Pokud jste získali z teoretické části nejméně 3 body je možno pokračovat v další části. V opačném případě je nutno si kapitolu znovu zopakovat ve zkráceném čase (40 minut) a znovu uvést odpovědi na kontrolní otázky.