2. Analogie mezi polem teplotním a elektrickým

- **Analogie mezi polem elektrickým a teplotním je velmi výrazná a pro elektrotechnika užitečná**
- Podstatně usnadňuje výpočty šíření tepla v jednodušších soustavách a v ustáleném stavu
- Pole elektrické i teplotní jsou obě nevírová, zřídlová
- Pro přehlednost budeme psát odpovídající si (analogické) veličiny **elektrické na stranu levou** a **tepelné na stranu pravou** a na stejný řádek

Potenciál

- Nulový potenciál je v nekonečnu
- Je to skalár
- Jednotka (V)

Napětí – potenciální rozdíl

- $U = V_1 - V_2$
- Je to skalár
- Jednotka (V)

Konduktivita

- Jednotka ($S.m^{-1}$) = ($\Omega^{-1}.m^{-1}$)

Termodynamická teplota

- Nulová teplota je -273,15 °C
- Je to skalár
- Jednotka (K)

Teplotní rozdíl

- $\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$
  $\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$
- Je to skalár
- Jednotka: pro $\Delta\Theta$ (K), pro $\Delta\vartheta$ (°C), (K) $\Rightarrow$ $\Delta\Theta = \Delta\vartheta$

Součinitel tepelné vodivosti

- Jednotka ($W.m^{-1}.K^{-1}$)

Rezistivita

- $r = \frac{1}{g}$
- Jednotka (Ω.m)

Elektrická vodivost

- $G = \frac{g \cdot s}{l}$
- Jednotka: $\frac{\frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot m^2}{m} = \frac{1}{\Omega} = S$

Elektrický odpor

- $R = \frac{l}{g \cdot s} = \frac{r \cdot l}{s}$
- Jednotka: $\frac{m}{\frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot m^2} = \Omega$

Tepelný měrný odpor

- $\frac{1}{l}$
- Jednotka (m.K.W^{-1})

Tepelná vodivost

- $G = \frac{l \cdot s}{l}$
- Jednotka: $\frac{\frac{W}{K \cdot m} \cdot m^2}{m} = \frac{W}{K}$

Tepelný odpor

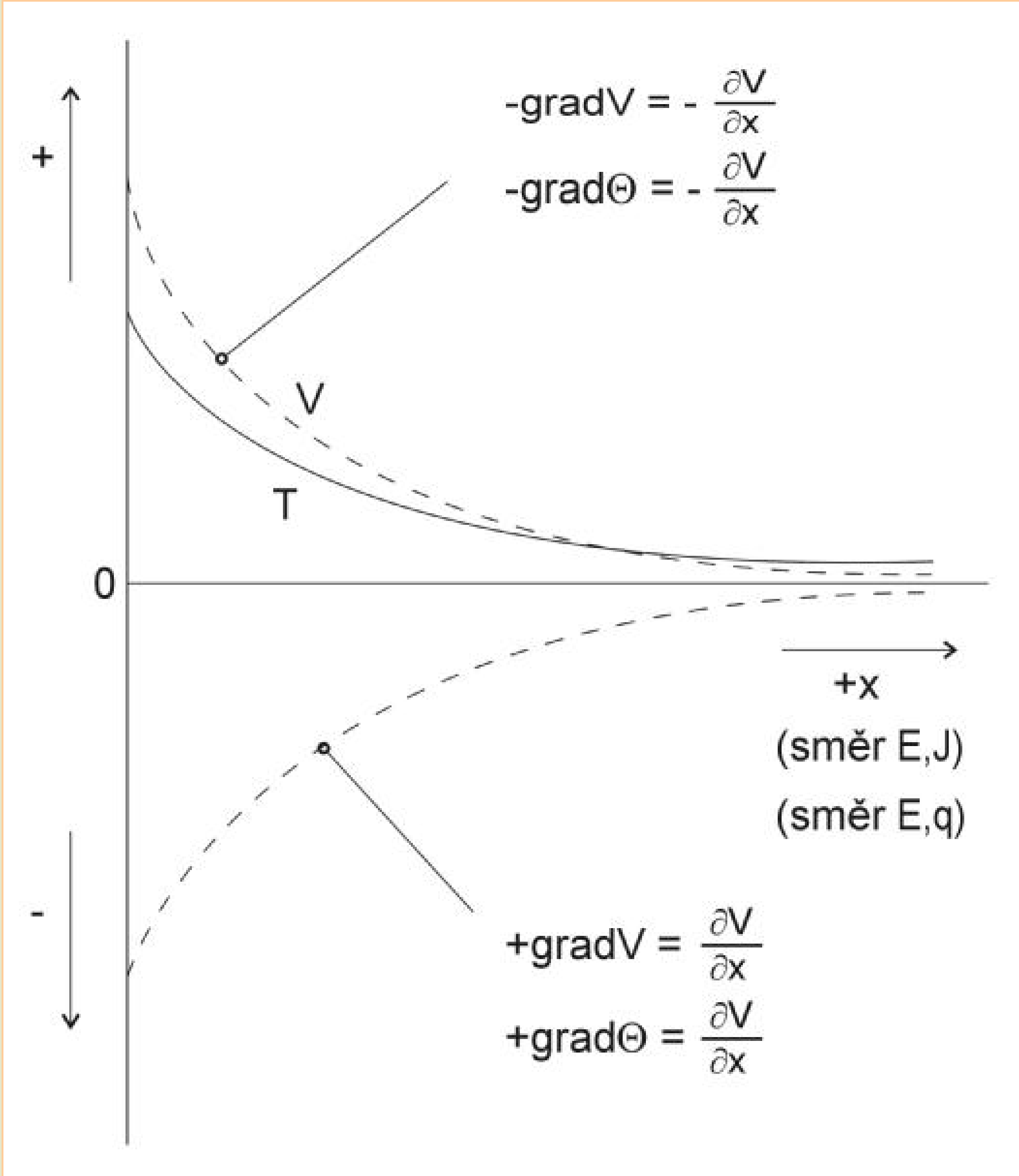
- $R = \frac{l}{l \cdot s}$
- Jednotka: $\frac{m}{\frac{W}{K \cdot m} \cdot m^2} = \frac{K}{W}$

Intenzita elektrického pole

- Je to potenciální rozdíl připadající na jednotku délky
- $\underline{E} = -gradV = -\frac{\partial V}{\partial \underline{n}}$
- Je to vektor
- n je normála k ekvi-potenciální hladině
- Při homogenním elektrickém poli je $\underline{E} = \frac{U}{d}$ $(d \text{ je vzdálenost})$
- Jednotka: (V.m^{-1})

Intenzita teplotního pole

- Je to velikost teplotního spádu = teplotní gradient = = tepl. rozdíl připadající na jednotku délky
- $\underline{E} = -\frac{\partial \Theta}{\partial n} = -\frac{\partial J}{\partial \underline{n}} = -grad\,\Theta =$ $= -grad\,J$
- Je to vektor
- n je normála k Isotermální hladině
- Při homogenním teplotním poli je $\underline{E} = \frac{\Delta\Theta}{d} = \frac{\Delta J}{d}$
- Jednotka: (K.m^{-1})



Obr. 1.17

Hustota elektrického proudu

- Příčinou hustoty elektrického proudu *J*, tj. proudu na jednotku plochy, je intenzita elektrického pole *E* a konduktivita g
- Hustota proudu má směr intenzity elektrického pole, tzn. směr klesajícího potenciálu
- Stoupání značí +*gradV*, klesání je -*gradV*
- Toto objasňuje obr. 1.17: u klesajícího potenciálu je *gradV* záporný, a kdyby tedy hustota proudu měla směr +*gradV*, procházel by proud ve směru záporném -*x*, což by bylo v rozporu se skutečností; proto musíme napsat, že proud prochází směrem -*gradV*

Hustota tepelného toku

- Příčinou hustoty tepelného toku *q*, tj. toku tepla za jednotku času připadající na jednotku plochy = výkon na jednotku plochy, je intenzita teplotního pole *E* a součinitel tepelné vodivosti l
- Obdobně jako hustota elektrického proudu *J* má směr -*gradV*, má hustota tepelného toku směr -*grad*Q, tj. směr klesající teploty podle obr. 1.17

Hustota elektrického proudu

- $\underline{J} = g \cdot \underline{E} = g \cdot (-gradV) =$
  $= -g \cdot gradV$
  Takto bude tedy mít *J* směr kladný, tj. +*x*
- Hustota proudu je vektor, protože má směr a velikost
- Směr je určen normálou na ekvipotenciální plochu
- Jednotka

$$\left(\frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot \frac{V}{m} = \frac{V}{\Omega \cdot m^2} = \frac{A}{m^2} \right)$$

Hustota tepelného toku

- $\underline{q} = l \cdot (-grad\Theta) = -l \cdot (grad\Theta)$
- Hustota tepelného toku je vektor, protože má směr a velikost
- Směr je určen normálou na ekvitermální plochu
- Jednotka

$$\left(\frac{W}{K \cdot m} \cdot \frac{K}{m} = \frac{W}{m^2} \right)$$

Elektrický proud

- $I = \int_S \underline{J} dS = \int_S g \cdot \underline{E} dS =$

  $= \int_S (-g) \cdot gradV dS$

  (skalár. součin dvou vektorů)
- *S* je plocha, v níž proud počítáme
- *I* není vektor, má pouze velikost, je to tedy skalár
- Jednotka

  $$\left(\frac{1}{\Omega \cdot m} \cdot \frac{V}{m} \cdot m^2 = \frac{V}{\Omega} = A \right)$$
- Při homogenním el. poli bude:

  $I = \frac{g \cdot s}{l} \cdot U = G \cdot U = \frac{U}{R}$

  G je elektrická vodivost

  R je elektrický odpor

Tepelný tok

- $P = \int_S \underline{q} dS = \int_S (-l) \cdot grad \Theta dS$

  (skalár. součin dvou vektorů)
- *S* je plocha, v níž tepelný tok počítáme
- *P* není vektor, má pouze velikost, je to tedy skalár
- Jednotka

  $$\left(\frac{W}{K \cdot m} \cdot \frac{K}{m} \cdot m^2 = W \right)$$

  Z rozměru je patrné, že tepelný tok je výkon
- Při homogenním tep. poli bude:

  $P = \frac{l \cdot s}{l} \cdot \Delta J = G \cdot \Delta J = \frac{\Delta J}{R}$

  G je tepelná vodivost

  R je tepelný odpor

Ekvipotenciální hladiny

- Jsou to plochy se stejným potenciálem

Silotrubice

- Obsahuje po celé délce konstantní dielektrický tok

Izotermy

- Jsou to plochy se stejnou teplotou

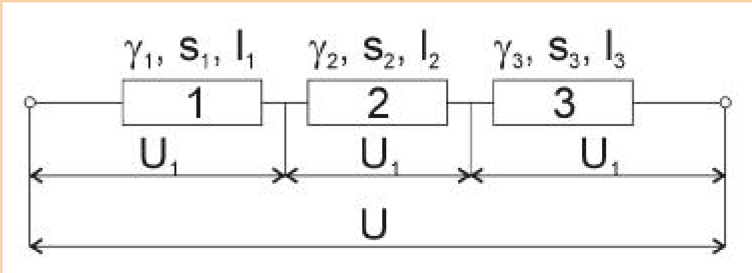
Teplotní trubice

- Obsahuje konstantní tok tepla (konst. tepelný výkon)

- Uvedené analogie použijeme s výhodou při výpočtech jedno-rozměrného vedení tepla (ustálený stav)
- Výpočty v oblasti **jednorozměrného vedení proudu budeme psát do levého sloupce**, výpočty v oblasti **jednorozměrného vedení tepla do pravého sloupce**

Jednorozměrné vedení proudu

Tři rezistory v sérii



Obr. 1.18

$$R_1 = \frac{l_1}{g_1 \cdot s_1}; R_2 = \frac{l_2}{g_2 \cdot s_2}; R_3 = \frac{l_3}{g_3 \cdot s_3}$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

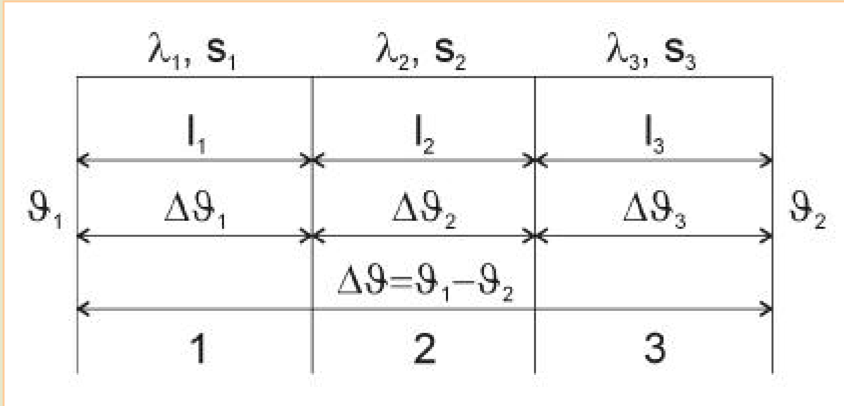
Proud:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U}{R}$$

$$U_1 = R_1 \cdot I_1; U_2 = R_2 \cdot I_2; U_3 = R_3 \cdot I_3$$

Jednorozměrné vedení tepla

Vedení tepla trojitou rovinou



Obr. 1.19

$$R_1 = \frac{l_1}{l_1 \cdot s_1}; R_2 = \frac{l_2}{l_2 \cdot s_2}; R_3 = \frac{l_3}{l_3 \cdot s_3}$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Tepelný tok:

$$P = \frac{\Delta J}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{\Delta J}{R}$$

$$\Delta J_1 = R_1 \cdot P_1; \Delta J_2 = R_2 \cdot P_2; \Delta J_3 = R_3 \cdot P_3$$

Dosadíme-li za *R* do vztahu pro *I*, bude:

$$I = \frac{U}{\frac{l_1}{\gamma_1 \cdot s_1} + \frac{l_2}{\gamma_2 \cdot s_2} + \frac{l_3}{\gamma_3 \cdot s_3}}$$

Bude-li $S_1 = S_2 = S_3 = S$, pak:

$$I = \frac{U \cdot s}{\frac{l_1}{\gamma_1} + \frac{l_2}{\gamma_2} + \frac{l_3}{\gamma_3}}$$

Zavedeme-li střední (průměrnou) konduktivitu γ_{av} podle vztahu

$$I = \frac{U \cdot s}{\frac{l_1}{\gamma_1} + \frac{l_2}{\gamma_2} + \frac{l_3}{\gamma_3}} = \frac{U \cdot s}{\frac{l_1 + l_2 + l_3}{\gamma_{av}}}$$

bude

$$\gamma_{av} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\frac{l_1}{\gamma_1} + \frac{l_2}{\gamma_2} + \frac{l_3}{\gamma_3}}$$

Dosadíme-li za *R* do vztahu pro *P*, bude:

$$P = \frac{\Delta J}{\frac{l_1}{\lambda_1 \cdot s_1} + \frac{l_2}{\lambda_2 \cdot s_2} + \frac{l_3}{\lambda_3 \cdot s_3}}$$

Většinou je $S_1 = S_2 = S_3 = S$, pak:

$$P = \frac{\Delta J \cdot s}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}}$$

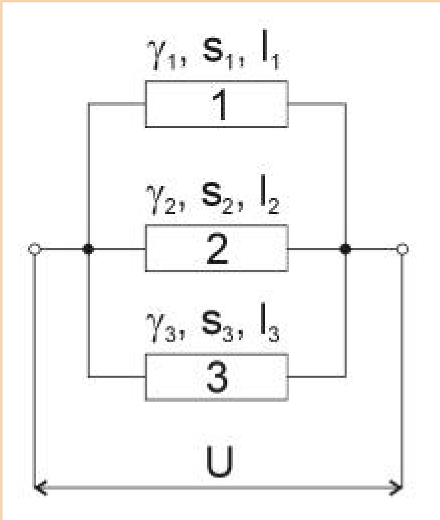
Často je výhodné zavést střední (průměrnou) λ_{av} podle vztahu

$$P = \frac{\Delta J \cdot s}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}} = \frac{\Delta J \cdot s}{\frac{l_1 + l_2 + l_3}{\lambda_{av}}}$$

bude

$$\lambda_{av} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}}$$

Tři rezistory paralelně



Obr. 1.20

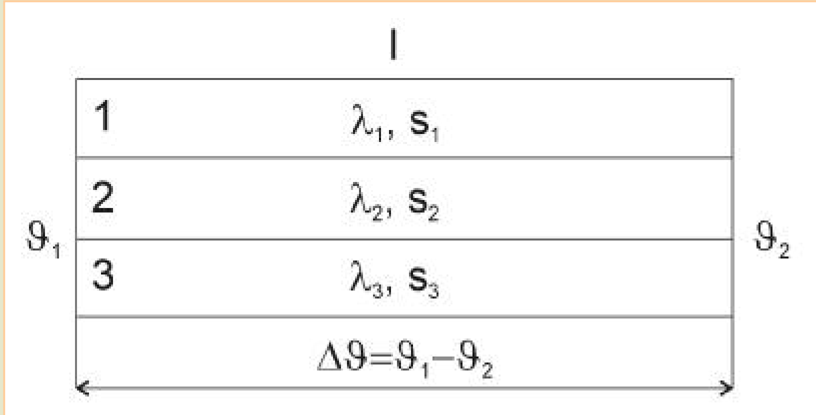
Sčítáme vodivosti:

$$G_1 = \frac{g_1 \cdot s_1}{l}; G_2 = \frac{g_2 \cdot s_2}{l}; G_3 = \frac{g_3 \cdot s_3}{l}$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{g_1 \cdot s_1 + g_2 \cdot s_2 + g_3 \cdot s_3}{l}$$

$$I = U \cdot G = U \cdot \frac{g_1 \cdot s_1 + g_2 \cdot s_2 + g_3 \cdot s_3}{l}$$

Tři paralelní tepelně vodivé vrstvy



Obr. 1.21

Sčítáme vodivosti:

$$G_1 = \frac{l_1 \cdot s_1}{l}; G_2 = \frac{l_2 \cdot s_2}{l}; G_3 = \frac{l_3 \cdot s_3}{l}$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_3}{l}$$

$$P = \Delta J \cdot G = \Delta J \cdot \frac{l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_3}{l}$$

Střední (průměrnou) konduktivitu γ_{av} určíme ze vztahu

$$G = \frac{g_1 \cdot s_1 + g_2 \cdot s_2 + g_3 \cdot s_3}{l} =$$

$$= \frac{g_{av} \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{l}$$

$$g_{av} = \frac{g_1 \cdot s_1 + g_2 \cdot s_2 + g_3 \cdot s_3}{s_1 + s_2 + s_3}$$

Střední (průměrnou) tepelnou vodivost λ_{av} určíme ze vztahu

$$G = \frac{l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_3}{l} =$$

$$= \frac{l_{av} \cdot (s_1 + s_2 + s_3)}{l}$$

$$l_{av} = \frac{l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_2 + l_3 \cdot s_3}{s_1 + s_2 + s_3}$$